

Materna, Pavel

## Malé zamyšlení nad modalitami

In: *Bratislavské přednášky*. Šmajš, Josef (editor). 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002, pp. 320-326

ISBN 8021029633

Stable URL (handle): <https://hdl.handle.net/11222.digilib/127839>

Access Date: 17. 02. 2024

Version: 20220831

Terms of use: Digital Library of the Faculty of Arts, Masaryk University provides access to digitized documents strictly for personal use, unless otherwise specified.

# Malé zamyšlení nad modalitami<sup>1</sup>

Vynecháme-li odkazy na antické a středověké náznaky analýz modalit (často velmi důvtipné), můžeme za vznik soudobé analýzy modalit pokládat spis C. I. Lewise *A survey of symbolic logic* (University of California Press 1918). Lewis podal první axiomatický systém modální logiky. Systémy, které následovaly, vytvořily postupně soubor mnoha interpretací základních modálních symbolů, tj.  $\Diamond$  a  $\Box$ .

Základní intuice stojící u kolébky těchto interpretací je následující:

$\Box p$  čteme *Je nutné, že p*,

$\Diamond p$  čteme *Je možné, že p*.

Tyto verbální přepisy jsou ne zcela jednoznačné. *Nutnost*, resp. *možnost* jsou výrazy, které používáme v různých kontextech: musíme připustit, že verbální výrazy nejsou jednoznačné, tj. že každý z těchto výrazů je homonymní, tj. že každý z nich vyjadřuje ne jeden, nýbrž více *pojmu*.

Moderní logika vytvořila mohutnou metodu logické analýzy. Na sémantické úrovni se modální pojmy začaly vykládat na základě pojmu *možný svět*, zavedeného především Leibnizem a rozšířeného ve 20. století v tzv. *sémantikách možných světů* („Possible-World Semantics“, PWS). Na syntaktické úrovni došlo k vytvoření mnoha axiomatických systémů, v nichž  $\Box$  a  $\Diamond$  byly chápány jako neinterpretované symboly; v závislosti na interpretaci měly vzniknout explikace výrazů *nutnost*, resp. *možnost* a tím vlastně objasnění, o jaký pojem nutnosti, resp. možnosti v daném případě jde.

Sémantika výrazu *logická nutnost*, resp. *logická možnost* se jeví z hlediska PWS jako průzračná:  $\Box p$  znamená *p je propozice pravdivá v každém možném světě*,  $\Diamond p$  znamená *p je propozice pravdivá v alespoň jednom možném světě*. Problémy se sémantikou nastaly v okamžiku, kdy formální axiomatické systémy zařadily mezi axiomy iterované modální symboly, např.

$$\Box p \supset \Box \Box p$$

nebo

---

<sup>1</sup>Původně jsem chtěl přispět „normálním článkem“ s veškerým aparátem. Časové omezení mě donutilo sepsat místo toho velice neformální a všem nárokům na solidní vědecký článek nevyhovující stať, jakousi „esej“.

$$\Diamond p \supset \Box \Diamond p$$

Aby vytvořil sémantiku i pro tyto případy, navrhl S. Kripke r. 1963 zavést do sémantiky možných světů další pojem, tzv. *dostupnost* (*accessibility*). Každá dostupnost je binární relace mezi možnými světy, a propozice  $p$  je v daném systému nutná *ve světě*  $w$ , je-li pravdivá v každém možném světě *dostupném* z  $w$ , a podobně propozice  $p$  je v daném systému možná, je-li pravdivá v alespoň jednom možném světě *dostupném* z  $w$ . Pojem možnosti a nutnosti se tedy v jednotlivých systémech liší v závislosti na tom, jak je charakterizována relace dostupnosti.

Jakkoli je kripkeovská interpretace schopna rozlišit jednotlivé axiomatické systémy na základě vlastností relace dostupnosti v daném systému, nelze říci, že jde o uspokojivou sémantickou definici. Vše, co víme o jednotlivých relacích dostupnosti, jsou pouze její formální vlastnosti, např. zda to je relace reflexivní, symetrická, tranzitivní apod. To je jeden rys této dnes prakticky univerzálně přijaté interpretace, který je nepřijímán transparentní intenzionální logikou (TIL): viz Tichého *The Foundations of Frege's Logic* (de Gruyter 1988).

Celý dnes přijímaný axiomatický přístup má některé další negativní rysy, sdílené všemi formalisticky pojatými axiomatikami. Je tu např. fakt, že proměnné propozic (i tvarově shodné s proměnnými pravdivostních hodnot ve výrokové logice) jsou používány v neshodě se svou sémantikou: jsou-li propozice funkce z možných světů, pak např. formule

$$\Box p \supset p$$

nedává smysl, protože  $\supset$  je pravdivostní funkce. (Pokud by  $p$  byla proměnná pravdivostních hodnot, pak by ovšem  $\Box p$  nedávalo smysl.)

Dále je tu nepřijemná skutečnost, že — jak říká v uvedené knize Tichý — student, který by se chtěl logika zeptat, co tedy je např. logická nutnost, dozví se nejdříve, co je nutnost podle systému K, S1, ..., S0.5, S5 apod. Navíc je pro každý z těch různých pojmů použit týž symbol, vždy  $\Box$ , resp.  $\Diamond$ .

Zde bych chtěl formulovat jeden postřeh, který má obecnější platnost než v oblasti modálních logik. Jde o to, že kdykoli soudobé logické analýzy — s výjimkou TIL — narážejí na nutnost analyzovat modality (a podle TIL to je vždy, kdy nejde o matematické pojmy, tedy nejen v tzv. „modálních kontextech“), uvažují jejich autoři o možných světech

„v metajazyku“; vlastní analýza je prováděna *bez explicitního použití proměnných pro možné světy*. Tak známý případ falešného úsudku

9 je nutně větší než 7  
Počet (velkých) planet je 9

.....  
*Tedy:* Počet (velkých) planet je nutně větší než 7

je prezentován ve „standardním“ (tj. proměnné možných světů neobsahujícím) tvaru

$$\begin{aligned} & \square 9 > 7 \\ & PP = 9 \\ & \dots\dots\dots \\ & \therefore \square PP > 7 \end{aligned}$$

z něhož podstatu chybnosti nelze vyčíst, takže zdůvodnění se odehraje v rovině „metajazyka“.

TIL pracuje s explicitními proměnnými možných světů a místo formálních výrazů, které čekají na své různé interpretace, zavedl práci s tzv. konstrukcemi, což jsou objektivní abstraktní procedury. Z tohoto přístupu vyplynula nutnost pracovat s proměnnými (což opět nejsou formální výrazy, nýbrž druh konstrukcí). Nepotřebuje pak přenášet logické argumenty do metajazyka, jsou „viditelné“ z konstrukcí samých. Hořejší příklad je pak prezentován asi takto (s určitým zjednodušením):

$$\begin{aligned} & \forall w [ > 9, 7] \\ & [= [PPw] 9] \\ & \dots\dots\dots \\ & \forall w [ > [PPw] 7] \end{aligned}$$

Z tohoto tvaru je okamžitě patrné, proč závěr nevyplývá z premis.

Platí zřejmě obecněji, že systémy, které nepracují přímo s proměnnými příslušných typů, jsou méně expresivní než ty, které — *ceteris paribus* — s takovými proměnnými pracují. (Jak ukazuje např. R. Muskens, Montaguův systém bez proměnných pro možné světy ztrácí žádoucí Church-Rosserovu vlastnost.)

S tím souvisí další možná výtka soudobým modálními logikám. Je téměř zavedenou praxí, že zatímco „modální variabilita“, daná závislostí

na možných světech, je respektována (i když jen v metažazyku), temporální variabilita, závislost na čase, je chápána jako jedna z interpretací možného světa. (Tak vznikají „temporální“ logiky jako „odrůda“ modálních logik. Neuvažuje se, že temporální a modální variabilita by mohly být analyzovány jako nezávislé jevy. V TIL je temporální variabilita chápána jako něco nezávislého na modální variabilitě. Proto konstrukce intenzí mají obvykle tvar

$$\lambda w \lambda t A,$$

kde proměnné  $w$ ,  $t$  jsou proměnné pro možné světy a časové okamžiky v tomto pořadí. Pak vzniká možnost definovat další, většinou neuvažované modality. Zatímco klasická nutnost (které nejspíš odpovídá v axiomatickém světě S5) je v TIL chápána jako třída propozic obsahující přesně jednu propozici (tu, která ve všech možných světech a časech nabývá hodnoty Pravda) a obdobně logická možnost jako třída propozic, do níž patří všechny propozice pravdivé v alespoň jednom světě a časovém okamžiku, takže  $\Box$  a  $\Diamond$  lze konstruovat jako

$$\begin{aligned} \lambda p \forall w \forall t [[pw]t] \\ \lambda p \exists w \exists t [[pw]t], \end{aligned}$$

máme nyní možnost konstruovat další modality, totiž

$$\begin{aligned} \lambda p \forall w \exists t [[pw]t] \\ \lambda p \forall t \exists w [[pw]t] \\ \lambda p \exists w \forall t [[pw]t] \\ \lambda p \exists t \forall w [[pw]t] \end{aligned}$$

Všechny tyto „nové“ modality jsou logické v tom smyslu, že definují třídy propozic, nikoli vlastnosti propozic (vlastnosti by byly závislé na možných světech). Avšak i zajímavé mimologické („empirické“) modality jsou při tomto pojetí definovatelné, např. modalita, kterou mají přírodní zákony: jsou také „nutné“, jak říkáme, ale ve skutečnosti jsou prostě „eternální“, tj. v daném světě platí „po celou dobu“. Každý přírodní zákon podle toho vymezuje třídu těch možných světů, v nichž propozice mající charakter zákona platí „věčně“. Podobně možnost, jakou máme na mysli, když říkáme *Dneska bude možná pršet*, není logická možnost

a dá se analyzovat na základě takto pojatých modalit. (Kdyby tato věta znamenala logickou možnost, mělo by její vyslovení asi takový význam, jako kdybychom řekli *Prší nebo neprší*: uvedená věta neobsahuje kontradikci, tedy propozice *dnes bude pršet* je pravdivá v alespoň jednom světě, tedy konstatování její možnosti je pravdivé bez ohledu na svět a čas.)

TIL tedy nabízí variantní přístup k analýze modalit. Lze předpokládat, že některé z výsledků soudobých modálních logik budou z hlediska TIL pokládány za méně relevantní z hlediska modalit a jiné budou jemněji analyzovány díky explicitnímu použití proměnných (zvláště pro možné světy a zvláště pro časové okamžiky).

### **Modalities in Transparent intensional logic**

During the 20th century the so-called modal logics have developed a host of formal systems which should model logical properties and relations which underlie modal contexts. In these systems modalities are conceived of in various distinct senses and are handled via 'operators' of necessity ( $\Box$ ) and possibility ( $\Diamond$ ), although they cover distinct concepts in distinct systems. Tichy's criticism of modal logics in his *The Foundations of Frege's Logic* concerned their radical relativization of modal concepts, the opacity of the respective symbolisms and insufficiency of Kripke's semantics which is based merely on formal properties of the relation of 'accessibility'. We can show another, therewith connected negative feature of modal logics: They do not use explicitly variables for possible worlds and times, which essentially weakens their expressivity. This can be demonstrated by their inability to solve some analyses. Their loss of expressivity is shared by Montague's systems which because of their not using variables for possible worlds do not possess the desirable Church-Rosser property.

### **Die Modalitäten in der transparenten Intensionallogik**

Die sog. Modal-Logiken entwickelten während des 20. Jahrhunderts eine Reihe von formalen Systeme, die die logischen Eigenschaften und Beziehungen, die den logischen Fundament für modale Kontexte bilden, beschreiben sollten. Die Modalitäten werden dabei im verschiedensten Sinne begriffen und durch Einführung von „Operatoren“ der Notwendigkeit und der Möglichkeit erfassen, die einheitliche Zeichen tragen,

obwohl es um verschiedene Begriffe geht (z. B.  $\square$ ,  $\diamond$  für Notwendigkeit, bzw. Möglichkeit). Der tschechische Logiker P. Tichý kritisierte die modallogische Einstellung in seinem Buch *The Foundations of Frege's Logic* aufgrund der absoluten Relativisierung der modalen Begriffe und der logischen Undurchsichtigkeit der entsprechenden Symbolik. Seine Kritik betraf auch die Mangelhaftigkeit der Kripke-„Semantik“, die auf den formalen Eigenschaften weiterhin ungeklärt gebliebenen Beziehungen der „Erreichbarkeit“ (accessibility). Man kann auch auf einen weiteren, obwohl zusammenhängenden negativen Zug der modalen Logiken hinweisen: sie verwenden keine expliziten Variablen für die möglichen Welten (und zeitlichen Augenblicke), und damit geht ihre Expressivität verloren. Das kann man an der Unmöglichkeit der Lösungen bei etlichen Analysen zeigen. Dieser Expressivitäts-Verlust teilen diese Logiken mit dem Montague-System, das — ohne die expliziten Variablen für mögliche Welten und Zeiten zu besitzen — auch die erwünschte Church-Rosser-Eigenschaft entbehrt.

### **Les modalités dans la Logique transparente intentionnelle**

Les soi-disant *logiques modales* ont développé au cours de XXe siècle une série de systèmes formelles au but de saisir les propriétés et les relations logiques qui servent comme base des contextes modales. On comprend les modalités dans les sens très divers en les saisissant à l'aide des « opérateurs » de nécessité et de possibilité, désignés uniformément ( $\square$ ,  $\diamond$  pour désigner la nécessité, respectivement la possibilité), même s'ils signifient des concepts différents. Pavel Tichý a critiqué la méthode des logiques modales dans son livre *The Foundations of Frege's Logic* en signalant le relativisme total des concepts modals et l'opacité logique des symboles utilisés. Il a critiqué en plus l'insuffisance de la « sémantique » de Kripke, parce qu'elle s'appuie sur les propriétés formelles des relations d'« accessibilité » (*accessibility*) qui restent insuffisamment élucidées. On peut montrer d'autres traits négatifs des logiques modales : elles n'utilisent pas les variables explicites pour désigner les mondes possibles (et pour les moments temporels), en perdant de ce fait de leur expressivité. On peut démontrer ce phénomène par l'impossibilité de mener bien au but certaines analyses. Les logiques modales partagent cette perte de l'expressivité

avec le système de Montague, lequel, ne possédant pas les variables explicites pour les mondes-temps possibles, ne possède non plus la propriété Church-Rosser désirée.



